Table des matières

Topologie

Fil RSS pour cette rubrique
Cette catégorie contient 8 billets

Chapître 1 : Espace métrique, ouverts, fermé, adhérence etc...

par idfolles · mercredi 14 mai 2008 · 0 commentaire

I. Chapitre 1

1°) Définition d'un espace métrique

Un espace métrique est ensemble E muni d'une métrique d qui est une application de E dans R+ telle que

d(x,x) = 0

d(x,y) = d(y,x)

d(x,z) < d(x,y) + d(y,z)

On peut en déduire l'inégalité triangulaire renversée

d(x,y) > | d(x,z) - d(z,y) |

2°) Métriques usuelles :

La valeur absolue dans R d(x,y) = |x -y|

Le module dans C

La métrique associée à toute norme

La métrique produit dans un ensemble produit d(x,y) = Max (d(xi,yi))

La métrique de la convergence uniforme sur les applications bornées de E vers F (bornée signifie que diam (f(E)) < ∞)

d(f,g) = Max(|f(x),g(x)|, x ∈ E)

3°) Boules, ouverts, fermés, adhérence, intérieur, extérieur, frontière, point isolé, point d'accumulation, espace dense, séparabilité :

Une boule ouverte Bo(x,r) = *y* ∈ *E,* |*x,y*| < *r*

Une boule fermée Bf(x,r) = $y \in E, |x,y| \quad r$

X est un ouvert de E ssi $\forall x \in X \exists r > 0, b(x,r) \subset X$

X est un fermé ssi son complémentaire dans E est un ouvert.

Une réunion infini d'ouverts est un ouvert

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Une réunion finie de fermés est un fermé

Une intersection infinie de fermés est un fermé

Adhérence de X :notée $\bar{X}$ ou Adh(X) est le plus petit fermé contenant X.

$x \in \bar{X} \iff \forall r > 0, b(x,r) \cap X \neq \emptyset$

L'adhérence d'un fermé est le fermé lui même.

L'intérieur d'un partie X de E c'est le plus grand des ouverts contenue dans X noté Int(X)
L'extérieur d'une partie X de E c'est le plus grand des ouverts ne contenant pas X et c'est aussi l'intérieur de C(X) C (signifie Complémentaire de)

Front(X) = C(Int(X) $\cup$ Ext(X))

E = réunion des trois ensembles disjoints Int, Front et Ext

Adh(X) = Int(X) $\cup$ Front(X) = X $\cup$ Front(X)

x est un point isolé de X ssi $\exists r > 0, b(x,r) \cap X = \emptyset$

x est un point d'accumulation ssi $\forall r > 0, b(x,r) - \{x\} \cap X \neq \emptyset$

Adh(X) = Isolé(X) $\cup$ Acc(X)

X est dense partout dans E ssi Adh(X) = E

L'espace E est dit séparable ssi il existe S dénombrable telle que Adh(S) = E

R l'ensemble des réels est séparable par Q car Q est dénombrable et dense dans R

Chapitre 2 : Suites convergentes et applications continues

par idfolles · mercredi 14 mai 2008 · 0 commentaire

1. Suites convergentes

Df : On appelle suite $\{x_n\}$ une application de $\mathbb{N}$ dans un espace métrique E

Df : On appelle sous-suite d'une suite $\{\alpha_n\}$ toute composé de $\alpha \circ \phi$ où ϕ est une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

(Exemple sous-suite des termes paires ou impaires)

Df : On dit que $\{x_n\}$ converge ssi :

$\forall \epsilon > 0 \exists N, \forall n > N |x_n, l| < \epsilon$

Propriétés immédiates :

a) La limite d'une suite est unique

b) Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite

c) L'ensemble des valeurs d'une suite convergente est une partie bornée

Proposition 1

a) x est adhérent à X ssi une suite convergente à éléments dans X connverge vers x

b) adh(X) est égale à l'ensemble des limites de suites d'éléments de X

c) X est un fermé si toute suite convergente à éléments dans X a sa limite dans X

2. Continuité

Df Une application f de E dans F est dîtes continue en a ssi

$\forall \epsilon \exists \eta, \forall x, |x, a| < \eta \Rightarrow |f(x), f(a)| < \epsilon$

Df Une fonction est continue sur une ensemble E ssi elle est continue en tout point de E

Df Une fonction est **uniformément continue** sur E si η ne dépend pas de l'élément x.

Df Une fonction est **lipschitzienne ou régulière** ssi

$\exists k, \forall x \in E, \forall y \in E |f((x), f(y)| < k|x, y|$

Df Les applications lipschitziennes sont incluses dans les applications uniformément continues elles-même incluses dans les applications continues

Proposition 2

Une application f de E dans F est continue ssi toute suite α convergente dans E est telle que $f \circ \alpha$ est une suite convergente dans F

THEOREME DE CARACTERISATION DES APPLICATIONS CONTINUES

Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) f est une application continue de E dans F

b) L'image réciproque des ouverts de F est l'ensemble des ouverts de E

c) L'image réciproque des fermés de F est l'ensemble des fermés de F

d) L'image de adh(X) est contenue dans adh(f(X))

e) toute suite convergente a pour image une suite convergente

Proposition 3 L'ensemble d'égalité de deux applications continues de E dans F est un fermé de F

Corrolaire : Si deux applications sont égales sur une partie S dense dans E, alors f = g

THEOREME DE COMPOSITION DES APPLICATIONS CONTINUES

La composée de deux applications continues est continues (idem en remplaçant continu par uniformément continu ou lipschitziennes)

3. Homéomorphismes, métriques équivalentes

Df Une applications f de E dans F bijective telle que f et f^{-1} sont continues est appelée un homéomorphisme

Df Deux métriques sont dits topologiquement équivalentes si l'identité de (E,d) vers (F, δ) est un homéomorphisme

Proposition 4

Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) d et δ sont deux métriques équivalentes.

b) Les ouverts de E pour d sont les mêmes que pour δ

c) Les fermées de E pour d sont les mêmes pour δ

d) Les suites convergentes de E pour d et δ sont les mêmes

e) Les applications continues de E pour d et δ sont les mêmes.

Df Deux mêmes que l'on a défini des métriques topologiquements équivalentes on peut définir des métriques uniformément ou régulièrement équivalentes.

Remarque :

On dit que des propriétés qui ne sont pas perturbés par le remplacement de métriques topologiquement équivalentes (resp uniformément, resp régulièrement) sont des propriétés topologiques (resp de structure uniforme, resp de structure lipschitzienne)

Quelques rappels du 1er Cycle sur les suites et les séries

par idfolles · mercredi 14 mai 2008 · 0 commentaire

Quelques rappels en vracs (ce qu'il y a d'important)

1. Si $\{U_{2n}\}$ et $\{U_{2n+1}\}$ ont même limite l alors $\{U_n\}$ a pour limite l

2. Si p étant donné, $\{U_{p+n}\}$ a pour limite l alors $\{U_n\}$ a pour limite l

3. Suite encadrées : si $V_n \leq U_n \leq W_n$ et que V_n et W_n ont même limite l alors $\{U_n\}$ a pour limite l.

4. Si $\{U_n\}$ est croissante et majorée alors elle est convergente

5. Suites adjacentes : Si $\{U_n\}$ est croissante et si $\{V_n\}$ est décroissante et si la limite de $U_n - V_n$ quand n tend vers + infini est nulle Alors $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ sont convergentes et ont même limite.

6 Suites particulières :

Arithmétiques

$U_{n+1} = U_n + r$

$U_n = U_0 + nr$

$S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$

Géométriques

$U_{n+1} = qU_n$

$U_n = U_0 q^n$

$S_n = \frac{(U_0)(1 - q^{n+1})}{1 - q}$

Arithmético-géométrique

$U_{n+1} = aU_n + b$

$U_n = a^n U_0 + \frac{b(1 - a^n)}{1 - a}$

Suite définie par une double récurrence

$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$

On résoud $x^2 - ax - b = 0$

Deux cas :

a) deux solutions r1 et r2

$\exists \lambda, \nu, U_n = \lambda {r_1}^n + \nu {r_2}^n$

b) une racine double r0

$\exists \lambda, \nu, U_n = {r_0}^n (\lambda + \nu n)$

7. Séries, Règle de $n^\alpha U_n$ Règle de Cauchy, Règle de D'alembert.

a) Critère Normal de Convergence :

Si la limite de Un quand n tend vers l'infini ne tend pas vers 0 alors Sn la série de terme général Un est divergente

b) Si Un=f(n) et f décroissante et positive alors Sn et $\int_0^\infty f(t)\,dt$ sont de même nature

b) Si 0

c) Si Un>0 et Vn>0 et $U_n \sim V_n$ en +l'infini les séries qui en sont issus sont de même nature.

d) Règle de Kummer Si *Un* et *Vn* sont à termes positifs et si $\forall n > p \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$

alors si ΣV_n converge alors ΣU_n converge

alors si ΣU_n diverge alors ΣV_n diverge

e) Règle de αU_n :

Si $U_n \sim_\infty \frac{\lambda}{n^\alpha}$ alors ΣU_n et $\Sigma \frac{\lambda}{n^\alpha}$ sont de même nature

Si $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha U_n = 0$ et si $\alpha > 1$ alors ΣU_n converge

Si $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha U_n = +\infty$ et si $\alpha \leq 1$ alors ΣU_n diverge

f) Règle de Cauchy

Si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{U_n} < 1$ alors ΣU_n converge

Si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{U_n} > 1 ou 1^+$ alors ΣU_n diverge

g) Règle d'Alembert

Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors ΣU_n converge

Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 ou 1^+$ alors ΣU_n diverge

h) Série absolument convergente

Df : une série est absolument convergente ssi $\Sigma |U_n|$ converge

Propriété : Si une série est absolument convergente alors ΣU_n converge

Une série qui converge mais pas absolument est dîte semi-convergente

Chapitre 3 : Espace COMPLET

par idfolles · mercredi 14 mai 2008 · 0 commentaire

1. Espace complet, Critère de Cantor fort

Df : on appelle suite de Cauchy toute suite $\{U_n\}$ telle que

$\forall \epsilon > 0 \exists N, \forall p > N, \forall q > N \implies |U_p, U_q| < \epsilon$

a) Les valeurs d'une suite de Cauchy est un ensemble borné

b) Dans un espace métrique toute suite convergente est de Cauchy

c) Pour montrer qu'une suite de Cauchy est convergente il faut et il suffit de montrer qu'une sous-suite est convergente

Df : On dit qu'un espace métrique est complet sit toute suite de Cauchy est convergente.

Proposition 1

a) si α_n est une suite de Cauchy et f une application uniformément continue alors $f \circ \alpha_n$ est une suite de Cauchy

On en déduit que

b) Si f est homémorphisme de E vers F uniformément continue de E vers F alors : Si F est complet alors E est complet.

Les parties complètes sont incluses dans les parties fermée de E et si E est complet il y a égalité entre les deux ensembles

Proposistion 2

Le produit d'espace métrique est complet ssi tous les espaces qui le compose sont complet.

CRITERE DE CANTOR

E est complet ssi toute suite de fermés *Xn* décroissante dont le diamètre tend vers zéro a une intersection non vide (réduite nécessairement à un singleton)

2. Théorème du point fixe :

Df : On dit qu'une application est contractante si elle est lipschitzienne de rapport k<1

Th du point fixe : Soit E un espace métrique complet et f une application de E dans lui même. Si f est contractante et admet un point fixe unique a tel que f(a) = a alors tous les itérés $x_n = f^n(x)$ convergent vers a quel que soit la valeur de départ x.

3. Théorème du prolongement d'une application continue

Si f une application de S dense dans E vers F uniformément continue alors il existe un prolongement g de f de E vers F si F est complet. Ce prolongement est uniformément continu.

4. Complété d'un espace E

Tout espace métrique E non complet peut être complété et dans lequel E est alors dense. Le complété de E est unique à une isométrie près.

5. Théorème de Baire les propositions (i) et (ii) sont équivalentes (passage au complémentaire)

(i) Soit *Xn* une famille dénombrable d'ouverts partout denses de E alors l'intersection des Xn est partout dense (et en particulier non vide)

(ii) Soit *Xn* une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides alors la réunion des Xn a un intérieur vide (et en particulier différents de E)

Dans la terminologie de Baire une partie dont l'intérieur est vide est dite de 1ère catégorie ("maigre" terminologie Bourbakiste). Un partie partout dense (complementaire d'une partie d'intérieur vide) est dite de 2nde catégorie ("rare" terminologie Bourbakiste).

Donc un em complet est dite de seconde catégorie. On dit aussi qu'un espace métrique complet est un espace de baire c'est-à-dire qui vérifie (i).

Corollaire : Dans un espace métrique complet tel qu'il existe une famille *Xn* telle que la réunion des Xn est égale à E, alors il existe un Xn d'intérieur non vide

Complétude de l'ensemble des réels

par idfolles · vendredi 16 octobre 2009 · 0 commentaire

La solution de l'équation $x^2 - (2\sqrt{2})x + 2 = 0$ est unique et égale à $\sqrt{2}$.
Cependant à partir de cette équation ont peut créer une suite d'intervalles $[x_{2n} ; x_{2n+1}]$de l'ensemble Q des rationnels telle que $\cap[x_{2n} ; x_{2n+1}]$ quand n tend vers l'infini tend vers le singleton $\{\sqrt{2}\}$ qui n'appartient pas à Q.
Il suffit de prendre $x_{n+1} = (2 + x_n^2)/(2x_n)$ et $x_0 = 1,4$

Les deux premiers intervalles sont :

$[1,4 ; 1,414285714]$
$[1,414213564 ; 1,41421356237310]$

Les intervalles $[x_{2n} ; x_{2n+1}]$ forment une suite décroissantes d'intervalles dont l'intersection est nulle dans Q mais réduite à un singleton dans l'ensemble des réels.

Cet exemple prouve que l'ensemble Q n'est pas complet.

Chapitre 4 : espace compact

par idfolles · mardi 27 octobre 2009 · 0 commentaire

1. Définition selon Bolzano-Weierstrass

Un espace est dit compact si de toute suite on peut extraire une sous suite convergente

Si un espace est compact cela implique qu'il est complet et bornée

Les parties compactes d'un espace E sont incluses dans les parties complètes elles mêmes incluses dans les parties fermées

Notion de précompact : un espace métrique est dit précompact si de toute suite on peut extraire une suite de Cauchy

Compact est équivalent à précompact et complet

Autre point de vue

Toute partie de E admet un point d'accumulation.

2. Définition selon Borel-Lebesgue

E un em, est compact est équivalent à si de tout recouvrement d'ouverts de E on peut extraire un recouvrement fini.

Les deux définitions sont équivalentes

Si E est compact les parties fermées et bornées sont des compacts pour la métrique induite

3. Propriétés des compacts

Th 1 l'image des compact par une application continue est un compact De plus si f est injective alors f est un homéomorphisme (cad fonction inverse continue)

Th du maximum et minimum : une fonction f continue définie sur un compact E est bornée. f a un minimum et un maximum qu'elle atteint.

Th 2 Toute application continue sur un compact est uniformément continue

Th 3 Tout produit fini de compact est un compact E1xE2 est un compact équivaut à E1 et E2 sont des compacts

4. Théorème d'ascoli, compacité dans l'espace des applications continue sur un compact.

Dans l'ensemble A des applications de E vers F on dit qu'une partie M de A est équicontinue, ou uniformément équicontinue ou régulièrement continue si l'ensemble des éléments de M est respectivement continues, uniformément continues ou régulièrement continues.

Th d'Ascoli Dans ce cadre là les parties précompactes de M pour la métrique de la convergence uniforme sont les parties équicontinues et les parties compactes celles qui sont équicontinues et fermées.

Espace vectoriel normé, Espace de Banach

par idfolles · jeudi 29 octobre 2009 · 0 commentaire

1. Rappel sur les evn (espace vectoriel normé)

Un espace de Banach est un evn complet

Exemple Kpuissance n où K est R ou C

2. Propriétés d'un espace de Banach

Prop 1

Tout sous ev d'un ev de Banach est un ev de Banach

Prop 2

Tout espace vectoriel normé admet une base algébrique

Prop 3

Si deux normes sont équivalentes (c-a-d il existe h et k tels que quelque soit x élément de E alors hl(x)<=n(x)<=kl(x)) sur E alors (E,n) est un espace de Banach si et seulement si (E,l) est une espace de Banach.

Prop 4

Tout espace vectoriel de Banach de **dimension finie** n est isomorphe à K^n.

Prop 5

Tous les **ev de dimension finie** sont donc de Banach et leur sev sont donc des fermés

Prop 6

Toutes les normes sont donc équivalentes sur les **evn de dimension finie**

Application linéaires continues, espace de Banach LC(V,W)

par idfolles · vendredi 30 octobre 2009 · 0 commentaire

1. Rappel :

On appelle applications linéaires d'ev un homomorphisme entre ev

F élément de L(V,W) est injective ssi Ker(F)=*0* Pour f de V dans V Ker(f) et Im(f) sont des sev de V

L(V,W) est un ev

On appelle **dual algébrique** toute applications linéaires de V vers les réels ou les complexes.

L(V,V) est une algèbre, ces applications linéaires sont appelées des **transformation linéaires** de V

L(F^p,F^n) F=R ou C est identifiable à l'ev des matrices Mn,p(F) à n lignes et p colonnes.

2. Applications linéaires continues

Proposition 1

les propositions suivantes sont équivalentes

f élément de L(V,W)

(1) f est continue en un point

(2) f est continue en 0

(3) f est continue en tout point de V

(4) f est uniformément continue

(5) f est régulière c-a-d qu'il existe c tel que ||f(x)||<= c||x||

Proposition 2

sup(||f(x)||/||x||,x différent de 0 élément de V)

=sup(||f(x)||/||x||,||x||<=1)

=sup(||f(x)||/||x||,||x||=1)=inf(c>0, quel que soit x,||f(x)||<=c||x||)

=||f||

f continue si ||f|| < l'infini

3. L'espace LC(V,W)

Théorème 1

L'ev des applications linéaires de V dans W est evn pour la norme définie dans la proposition 2. Et si W est est un espace de Banach alors LC(V,W) est une espace de Banach

LC(V,V) s'appelle l'ensemble des **opérateurs** de V

4. Exemples généraux

a) Si W est un espace de Banach L(V,W) est un espace de Banach

b) L(F,W) il existe une isométrie entre F et L(F,W)

c) LC(V,F) est un dual topologique noté V', c'est aussi un espace de Banach

d) Hyperplan. Si f est une forme linéaire du dual topologique LC(V,F) alors Ker(f) est appelé Hyperplan de F (on a Pour tout x de V-Ker(f), Lin(Ker(f)U*x*)=V)

e) L'ensemble des opérateurs de V dans V continues est une algèbre si V est complet (espace de Banach). Il est noté Oméga(V).

5. Exemples particuliers

a) Les opérateurs des intégrales et primitives sur les fonctions continues sur un interval [a,b] où les intégrales et les primitives sont munis de la norme sup(|f(t)|,T élément de [a,b]) et sont à valeur dans R. C'est un dual topologique

b)Opérateur de Fredholm à suivre