Quelques notions préliminaires

1. Axiome de choix et théorème de Zorn

L'axiome de choix dit qu'il existe une application surjective (c-a-d dont toute image a au moins un antécédent) de l'ensemble des parties d'un ensemble E dans lui même.

Il se décline avec le théorème de Zorn qui dit Dans tout ensemble inductif (c-a-d dont toutes les parties sont ordonnée), il existe un élément maximal.

Théorème très utile quand on étudie les espaces vectoriels sachant l'ensemble des familles libres d'un espace vectoriel est inductif. L'élément maximal est appelé la base de l'espace vectoriel.

2. Notion de produit cartésien

Ce que je retiens du texte de mon cours de licence c'est que $\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des fonctions des réels dans les réels

Sinon il y a la notion d'égalité de deux éléments d'un produit cartésien si chacun des sous éléments sont égaux un à un.

3. Sur l'arithmétique

Beaucoup de chose basique sur $\mathbb{N}$ comme ensemble de la cardinalité avec deux lois internes l'une l'addition correspondant à la cardinalité de la réunion de deux ensembles et l'autre la multiplication correspondant à la cardinalité de l'ensemble produit de deux sous ensembles A et B de $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ crées pour que l'addition apporte la notion d'anneau unitère.

Puis la division euclidienne et le pgcd.

Mais nous verrons plus tard ces notions là avec le théorème de Bezout.

4. Sur la logique

La négation d'un ou de proposition Pn est égale aux et des propositions non Pn

La négation d'un il existe x tq P(x) est le quelque soit x non P(x) et inversement

Algèbre : Groupes

Ce que j'ai retenu du cours d'algèbre licence : les groupes Cours de Brigitte Duffaud (CTU Besançon)

Chapitre 1 : Groupe

définition : Ensemble muni d'une loi interne possédant les propriétés AES Associativité, Elément neutre, Symétrique

Un groupe peut être commutatif ou abélien si pour tout x,y, xy = yx

exemples de groupe

groupe diédral à quatre éléments D4 des transformations du plan le laissant globalement invariant

groupe des racines quatrième de l'unité

groupe quaternionien

Sous groupe : si tout élément du sous groupe a son symétrique dans le sous groupe et si toute somme (ou produit) de deux éléments du sous groupe est encore élément du sous groupe.

Sous groupe engendrée par une partie.

$< P >$ *= p0p1…..pn, pi élément de P U P-1*

C'est le plus petit sous-groupe contenant P

Groupe monogène, groupe inifini, groupe cyclique

Tout groupe d'ordre p, p premier, est cyclique (car pour a élément de ce groupe

$< a >$

est d'ordre diviseur de p or p est premier donc

$< a >$

est le groupe)

Loi et table de composition

Treillis d'un groupe

algorithmes de fabrication d'un treillis d'un groupe fini d'ordre n : 1.On calcule pour tous les éléments de G leurs différentes puissances.

2.On ajoute à chaque sous-groupe ainsi créé, un élément de plus dans la partie qu'il engendre jusqu'à obtenir le groupe G

3.On a le schéma suivant à chaque étape

$< H, K >$

$< H >$ $< K >$

$< HinterK >$

Si H ou K est normal dans G alors

$< H, K >$ = HK = *xy, x élément H y élément K*

Tous sous-groupes de G est d'ordre diviseur de n.

Pour les groupes cycliques, il faut connaître les propriétés suivantes :

$< a >$ *= e, a,* $a^2 \ldots, a^{d-1}$ si | a | = d

$< a > = < b >$ ssi b = ai i tel que 0 < i < d i étranger à d

si b = ai i tq 0 < i < d d l'ordre de a alors **est d'ordre d/pgcd(i,d)**

si $< a >$ est d'ordre d, pour tout diviseur u de d on a le groupe cyclique $< ad/u >$ d'ordre d/u

Chapitre 2 : Homomorphismes

Il existe deux groupes d'ordre 4 non isomorphes D4 et ?4 et tous les sous groupes d'ordre 4 sont isomorphes à l'un des deux.

Automorphismes intérieur : ha(x) = axa-1

Un sous groupe H est dit normal (ou distingué ou invariant) si pour tout a élément de G ha(H) inclu dans H

Sous grouoe engendré par des sous groupes normaux

$<$ H0,H1,H2,…..,Hn$>$ = H0H1H2…..Hn ssi tous les sous-groupes sont normaux

$< H, K >$ = HK si au moin l'un des sous-groupe est normal

Homomorphismes de Z dans G.

Il existe un unique homomorphisme h de Z dans G tel que h(1) = a h(n) = an ou na si groupe G noté de façon additive (na veut dire a+a+a+….+a n fois et pas n fois a ce qui ne signifierait rien)

<a> est cyclique d'ordre n ssi an = e
Tout les sous-groupes de Z sont de la forme aZ.

Ensembles des propriétés vues en exercices :

Chapitre 3 : Classe modulo et groupes quotients

Soit G un groupe et H un sous-groupe. On crée la relation d'équivalence suivante : x équivalent à y ssi x-1y élément de H.

La classe de a élément de G est l'ensemble aH

Etant donné le caractère bijectif entre H et aH et le fait que l'on est une relation d'équivalence on en déduit que tout sous groupe de G est d'ordre diviseur de celui de G

On appelle indice (G:H) le nombre d'élément d'une classe modulo H Soit H et K deux sous groupes de G : on a (G:K)=(G:H)(H:K).

(G:H) divise |G|

Groupes quotients G/H est constitué de toutes les classes modulo H de G,

Si H est (très important) un sous groupe normal de G, il existe un homomorphisme surjectif q dit homomorphisme canonique de passage au quotient, de G dans G/H tel que ker q = H. Cet homomorphisme canonique q associe à tout élément de G la classe modulo H de cet élément.